

Análisis experimental para el ajuste de un método GRASP para el Strip Packing Problem*

J. David Beltrán Cano, Rayco Jorge Cabrera,
José A. Moreno Pérez, J. Marcos Moreno-Vega

Dpto. de Estadística, I.O. y Computación

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

Universidad de La Laguna

38271 La Laguna. Santa Cruz de Tenerife

jamoreno@ull.es, jmmoreno@ull.es

Resumen

El *Strip Packing Problem* (SPP) es un problema de optimización combinatoria ampliamente estudiado que tiene importantes aplicaciones. En el SPP se desea empaquetar, a mínima altura, un conjunto de piezas rectangulares dentro de un rectángulo con ancho conocido. Los problemas que surgen en las aplicaciones industriales tienen gran tamaño, por lo que es de interés disponer de procedimientos eficientes y eficaces para su resolución. En este trabajo describimos un procedimiento GRASP para el problema y realizamos un análisis de diversas políticas de asignación de valor a los parámetros que determinan completamente el diseño de la fase constructiva de dicho método. Con el ajuste realizado se consiguen resultados comparables o mejores a los reseñados en la literatura.

1. Introducción

El *Strip Packing Problem* (SPP) es uno de los problemas de empaquetado más importante. Los problemas de empaquetado consti-

tuyen una amplia clase de problemas en los que, de forma general, se desea empaquetar un conjunto de items (figuras geométricas pequeñas) en un objeto geométrico mayor (o conjunto de objetos) de tal forma que se optimice algún objetivo relativo al empaquetado obtenido. La importancia de estos problemas en procesos industriales o de gestión financiera se refleja en la gran cantidad de trabajos aparecidos en la literatura científica. Algunos trabajos de revisión y clasificación en los que también se enumeran aplicaciones son [10], [11], [12] y [15].

En los problemas de empaquetado bidimensionales estándares tanto los items como el objeto son rectangulares. Dada una banda rectangular de anchura fija y un conjunto de rectángulos, se desean empaquetar éstos utilizando el menor trozo posible de la banda. Aquí abordamos el problema del empaquetado rectangular bidimensional no guillotina no orientado donde los rectángulos se pueden rotar y los cortes entre ellos pueden ser de tipo no guillotina. Un corte es tipo guillotina si atraviesa el objeto desde un lado del mismo hasta el lado opuesto. En un corte no guillotina, lo anterior no es cierto.

Analizamos la aplicación de un procedimiento constructivo de tipo GRASP para una versión estándar del SPP. Las ideas básicas de este procedimiento aparecieron en la fase constructiva del método GRASP propuesto en

*Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología (proyecto TIC2002-04242-C03-01 (70% son fondos FED-ER)) y por el Gobierno de Canarias (proyecto PI042004/088). La actividad desarrollada se enmarca dentro de los objetivos de la red RedHeur (proyecto TIN2004-20061-E).

[2]. El método constructivo fue analizado en [19] usando estadística no paramétrica para analizar los posibles valores del parámetro que controla el proceso constructivo. La principal conclusión de ese trabajo fue que el valor del parámetro debe ser aquel que persigue un ajuste perfecto o casi perfecto en la introducción de cada nuevo objeto. Un procedimiento muy similar al introducido en [19] ha sido utilizado en [9] con buenos resultados en muy poco tiempo. La política de asignación de valor al parámetro de ajuste estudiada en [19] era de tipo constante durante todo el proceso de construcción. En el presente trabajo se analizan políticas dinámicas de asignación para este parámetro.

2. El Strip Packing Problem

Aquí consideramos el problema del empaquetado rectangular bidimensional no orientado y no guillotina que se formula como sigue. Dado un objeto rectangular de amplitud fija w y altura infinita, y un conjunto, $\mathcal{R} = \{R(w_1, h_1), \dots, R(w_n, h_n)\}$, de rectángulos con al menos uno de sus lados, w_i , h_i , menor que w , se desea colocar el conjunto \mathcal{R} en el objeto rectangular utilizando el menor espacio posible (o lo que es lo mismo, se pretende minimizar la altura del empaquetado) sin que se solapen los rectángulos que se pueden rotar.

La formulación matemática del problema y una revisión de la aplicación de metaheurísticas para el SPP se encuentra en [15] y [16]. En [17] y [18] se discuten modelos matemáticos, cotas inferiores, algoritmos de aproximación y se describen diversas heurísticas y métodos enumerativos exactos para el problema. Un novedoso algoritmo genético se propone en [8] con excelentes resultados tanto para el problema orientado (sin posibilidad de girar los rectángulos) como el no orientado. El SPP con cortes guillotina es estudiado en [22].

Las soluciones vienen dadas por la posición y rotación de cada rectángulo R_i , $i = 1, \dots, n$. La colocación p_i del rectángulo R_i viene dado por (a_i, b_i, r_i) donde el par (a_i, b_i) son las coordenadas de la esquina inferior-izquierda del rectángulo R_i con respecto al origen de co-

ordenadas, que se fija en la esquina inferior-izquierda de la banda, y r_i es una variable binaria que representa si R_i -th se gira o no. Si $r_i = 1$ entonces R_i se gira 90 grados, en otro caso $r_i = 0$ el rectángulo no se gira. El problema es establecer la colocación óptima (a_i, b_i, r_i) de los rectángulos R_i , $i = 1, \dots, n$. La colocación es factible si los rectángulos no se solapan y están completamente dentro de la banda. Formalmente, la colocación es factible si todo rectángulo R_i verifica las dos propiedades siguientes

- Si $r_i = 0$ entonces $0 \leq a_i \leq w - w_i$, $0 \leq b_i$ y la posición de ningún otro rectángulo R_j verifica $a_i < a_j < a_i + w_i$ y $b_i < b_j < b_i + h_i$.
- Si $r_i = 1$ entonces $0 \leq a_i \leq w - h_i$, $0 \leq b_i$ y la posición de ningún otro rectángulo R_j verifica $a_i < a_j < a_i + h_i$ y $b_i < b_j < b_i + w_i$.

El objetivo es minimizar la altura máxima h alcanzada por los rectángulos que se puede calcular por:

$$h = \max\{\max_{r_i=0}(b_i + h_i), \max_{r_i=1}(b_i + w_i)\}.$$

Se pueden obtener infinitas soluciones equivalentes desplazando horizontalmente o verticalmente algunos rectángulos mientras sea posible. Para evitar un espacio de búsqueda infinito se consideran estrategias fijas de colocación. Entre las estrategias más comunes y que empleamos aquí está la denominada *bottom-left* donde los rectángulos son sucesivamente colocados en la posición más profunda posible, y dentro de ella desplazada totalmente hacia la izquierda. Por tanto, las soluciones vienen determinadas por el orden en que se introducen los rectángulos y su posible rotación.

3. GRASP

En un método constructivo se añade iterativamente elementos a una estructura, inicialmente vacía, hasta obtener una solución del problema. La elección del elemento a incluir se basa en una evaluación *heurística*, que mide

la conveniencia de considerar este elemento como parte de la solución. La función heurística es dependiente del problema y expresa el conocimiento que sobre el mismo se tiene. Si la evaluación de un elemento depende de los elementos previamente incluidos en la solución se dice que el método es *adaptativo*.

Además de la función heurística, es necesaria una estrategia que indique qué elemento se escoge. Una de las estrategias más conocidas es la *greedy* en la que se selecciona el elemento que optimiza la función heurística. Esta estrategia suele dar pobres resultados en la mayoría de los casos. Por ello se han propuesto estrategias alternativas. Una de ellas consiste en elegir, no el mejor elemento, sino uno de los mejores al azar. Al conjunto de los mejores elementos se le llama *Lista Restringida de Candidatos (LRC)*.

GRASP (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure) [13], [14], [20] es un procedimiento heurístico que consta de varias etapas (ver figura 1). A una fase constructiva, en la que se escoge iterativamente y al azar un elemento de la lista restringida de candidatos, le sigue una fase de postprocesamiento en la que se mejora la solución obtenida en la fase anterior. Como postprocesamiento suele emplearse una simple búsqueda local descendente. Los anteriores pasos se reiteran hasta que se cumpla el criterio de parada. La mejor solución obtenida es la propuesta por el algoritmo. En ocasiones, se considera una fase de preprocesamiento previa a la fase constructiva. El propósito de esta fase es acelerar la fase constructiva posterior, incluyendo aquellos elementos que, en base a algún criterio, *deben* estar en la solución. Así, pueden incluirse aquellos elementos que necesariamente pertenecen a la solución óptima del problema, o aquellos elementos que, en base a la experiencia del decisor o historia pasada de la búsqueda, pertenecen a soluciones de alta calidad.

Los elementos que determinan completamente la técnica GRASP son: el método de preprocesamiento, la función heurística, la forma en que se construye la lista restringida de candidatos, el método de postprocesamiento y el criterio de parada. De los anteriores ele-

```

procedure GRASP;
begin
  Fase de preprocesamiento(Solución Inicial);
  Solución Actual := Solución Inicial;
  Mejor Solución := Solución Actual;
  repeat
    Fase Constructiva(Solución Actual);
    Fase de Postprocesamiento(Solución Actual)
  If Objetivo(Solución Actual) <
    Objetivo(Mejor Solución)
  then Mejor Solución := Solución Actual;
  until (Criterio de parada);
end

```

Figura 1: Pseudocódigo descriptivo del GRASP.

mentos, algunos son totalmente dependientes del problema y para otros pueden hacerse elecciones dependientes o independientes del mismo. Así, la función heurística es dependiente del problema, y la regla de parada puede ser dependiente o independiente del problema.

4. GRASP para el Strip Packing Problem

El GRASP que empleamos para resolver el Strip Packing Problem fue propuesto en [2]. En posteriores trabajos hemos propuesto y analizado variantes del mismo. Los trabajos realizados se han centrado en el diseño, implementación y análisis de la fase de postprocesamiento [3], en reglas de parada [4] y [5], y en métodos híbridos [6] y [7]. En el presente trabajo usamos una variante simple de la técnica que no incorpora las fases de preprocesamiento y postprocesamiento. Además, el criterio de parada es independiente del método y del problema, y consiste en finalizar la búsqueda después de un número máximo de fases constructivas. A continuación, describimos la función heurística que usamos para obtener la lista restringida de candidatos del GRASP.

4.1. Función heurística. Lista restringida de candidatos

La evaluación heurística que se hace de cada rectángulo aún no empaquetado en el objeto

se basa en el concepto de contorno superior asociado a la solución parcial construida por el GRASP.

Contorno. La inclusión de un rectángulo cualquiera en el objeto, determina un contorno superior rectangular como el que se muestra en la figura 2. Además, es posible que se obtengan áreas no aprovechables, llamadas desperdicios, como el que se obtiene al incluir el rectángulo 4 en el objeto de la figura 2. El contorno, C , puede representarse por medio del conjunto de segmentos horizontales (tomados de izquierda a derecha) que lo forman. Es decir:

$$C = \{(y^1, x_1^1, x_2^1), (y^2, x_1^2, x_2^2), \dots, (y^c, x_1^c, x_2^c)\}$$

con

$$\begin{aligned} y^i &\equiv \text{altura del } i\text{-ésimo segmento} \\ x_1^i &\equiv \text{punto inicial del } i\text{-ésimo segmento} \\ x_2^i &\equiv \text{punto final del } i\text{-ésimo segmento} \end{aligned}$$

Además, $x_1^1 = 0$ y $x_2^c = w$. Nótese que, intuitivamente, es preferible un contorno formado por pocos niveles a otro con muchos niveles. Esto es así, ya que, en general, la posibilidad de obtener desperdicios aumenta con el número de niveles.

Lista restringida de candidatos. Sea t la iteración actual del proceso constructivo y supongamos que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, siendo \mathcal{R}_1 el conjunto de los rectángulos previamente incluidos en el objeto y $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_1$. Sea $C(t)$ el contorno determinado por los rectángulos de \mathcal{R}_1 . Evaluaremos la conveniencia de incluir un rectángulo de \mathcal{R}_2 en el objeto por la forma que tendrá el contorno $C(t)$ tras su inclusión.

1. *Lista restringida de candidatos:* sea dado $\beta \in [0, 1]$ y supongamos que el segmento del contorno con menor altura es (y^i, x_1^i, x_2^i) . La lista restringida de candidatos se construye como sigue:

$$\begin{aligned} LRC &= \{R(w_j, h_j) \in \mathcal{R}_2 : \\ &(\beta(x_2^i - x_1^i) \leq w_j \leq (x_2^i - x_1^i) \vee \\ &(\beta(x_2^i - x_1^i) \leq h_j \leq (x_2^i - x_1^i))\} \end{aligned}$$

Es decir, la lista está formada por aquellos rectángulos que mejor se ajustan al

ancho del segmento inferior del contorno. El ajuste viene determinado por el valor de β .

Para que la anterior definición tenga sentido, debe haber, al menos, un rectángulo de \mathcal{R}_2 , digamos $R(w_r, h_r)$, tal que w_r o h_r están en el intervalo $[\beta(x_2^i - x_1^i), (x_2^i - x_1^i)]$. Si ningún elemento de \mathcal{R}_2 cumple la anterior condición, se ubica dentro del objeto el rectángulo que mejor se ajusta a $x_2^i - x_1^i$, y se reconstruye el contorno. Si no existe tal rectángulo, se reconstruye el contorno eliminando, convenientemente, el segmento (y^i, x_1^i, x_2^i) .

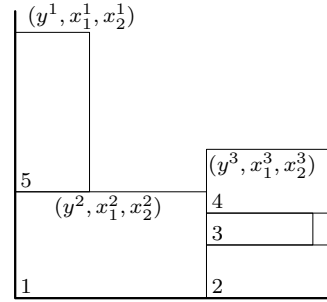


Figura 2: Contorno

4.2. Políticas de asignación de valor al parámetro β

El parámetro β modula el nivel de ajuste que se exige en la fase constructiva. En los casos extremos en que $\beta = 0$ y $\beta = 1$, los niveles de exigencia son mínimo y máximo, respectivamente. Estas situaciones se corresponden con una versión altamente aleatoria y altamente determinista de la fase constructiva. Nuestra experiencia previa en la resolución de este problema, nos indica que la versión determinista suministra soluciones de alta calidad, aunque no es capaz, en muchos casos, de obtener la solución óptima del problema. A esta misma conclusión se llega después de analizar los resultados que se muestran en [9]. La versión aleatoria, por su parte, suministra soluciones alejadas de la solución óptima.

En este trabajo se analiza el comportamiento de diversas políticas de asignación de va-

lor al parámetro β . En los trabajos previos, se han usado políticas de asignación dadas por una función constante. Es decir, se fija el parámetro β a un valor y se mantiene constante de una iteración a otra de la fase constructiva y, también, entre diferentes fases constructivas.

Sea $\beta(t, k)$ el valor que toma el parámetro β en la t -ésima iteración de la k -ésima fase constructiva. Las versiones altamente aleatoria y altamente determinista de nuestro GRASP se corresponden, respectivamente, con las funciones $\beta(t, k) = 0$ y $\beta(t, k) = 1$, $\forall t = 1, \dots, n$ y $\forall k = 1, \dots, k_{max}$, siendo k_{max} el número de fases constructivas ejecutadas por el algoritmo.

5. Experiencia computacional

El objetivo de la experiencia computacional fue estudiar el efecto que las diferentes políticas de asignación de valor al parámetro β tienen sobre el comportamiento de la técnica GRASP. Para ello se resolvieron instancias de SPP obtenidas de la literatura. Se utilizaron las 5 instancias de mayor tamaño (de N_8 a N_{12}) de las introducidas por Burke et al. [9] (en el cuadro 3 se muestran las características de estas instancias). El método GRASP propuesto para el SPP fue implementado en C y las diferentes versiones del procedimiento ejecutadas en un ordenador Pentium IV a 2.4 GHz y con 256 Mb RAM.

Las políticas de asignación de valor al parámetro β estudiadas fueron del tipo

$$\beta(t, k) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \lambda \\ (t - \lambda)/\delta & \text{si } \lambda \leq t \leq \lambda + \delta \\ 1 & \text{si } t \geq \lambda + \delta \end{cases}$$

siendo λ y δ valores enteros que verifican $0 \leq \lambda < \lambda + \delta < n$.

En un análisis preliminar con diversos valores dentro de todo su rango, tanto para λ como para δ , se observó una clara diferencia entre valores grandes y pequeños. A partir de este primer análisis de conclusiones evidentes, se ajustó el estudio eligiendo para ambos parámetros diez valores, λ_0 a λ_9 y δ_0

a δ_9 respectivamente, uniformemente repartidos entre 0 y $n/5$. Estos valores van desde el 0% hasta el 18% del número n de objetos. Así, por ejemplo, para el problema N_{12} que tiene 500 rectángulos, los valores fueron $\lambda = 0, 10, 20, \dots, 90$ y $\delta = 1, 11, 21, \dots, 91$.

Para cada una de las 100 combinaciones de valores de los parámetros λ y δ se ejecutó el GRASP usando como criterio de parada el número máximo, $k_{max} = 10000$, de fases constructivas desarrolladas. En el cuadro 1 se muestra el porcentaje medio de desviación con respecto al valor objetivo óptimo h_{opt} (disponible en [9]) para las ejecuciones con cada valor de cada uno de los parámetros. Este porcentaje se calculó por $100(h - h_{opt})/h_{opt}$. El cuadro 1 resume los resultados obtenidos para cada uno de los parámetros con los problemas de N_8 a N_{12} . En la parte superior de dicha tabla se muestran, para cada valor de λ , los porcentajes de desviación promedio obtenidos sobre los 10 valores del parámetro δ . Se recoge también la media sobre los 5 problemas considerados. Similarmente, la parte inferior del cuadro 1 muestra los promedios obtenidos para cada valor del parámetro δ .

De los resultados obtenidos se concluye que los valores de los parámetros λ y δ deben ser bajos. Así, con $\lambda = 0$ se obtuvo la menor desviación media con respecto al valor objetivo, promediada sobre todos los problemas considerados, y este valor crece al aumentar el valor de λ . La conclusión para el parámetro δ no es tan clara, ya que el mejor valor promedio se obtuvo cuando δ era $1 + 4\%$. Por tanto, se deduce que en las primeras iteraciones del método constructivo de GRASP deben seleccionarse para su empaquetado rectángulos posibles al azar, y rápidamente debe tenderse a una política del mejor ajuste.

Para profundizar en este aspecto se analizó más en detalle el comportamiento con el problema N_{12} . El cuadro 2 muestra valores objetivos promedios a diferente número k de iteraciones (fases constructivas) obtenidos al usar 25 combinaciones de (λ, δ) tomando la mitad de los valores del experimento anterior. Se observa que el mejor comportamiento ha producido cuando $\lambda = 0$ y $\delta = 1$.

Finalmente, como tercer experimento se utilizaron los valores $\lambda = 0$ y $\delta = 1$ para comparar nuestra propuesta de GRASP con el método *Best-fit* de Burke et al. [9] para los problemas grandes usados por estos autores. En el cuadro 3 se recogen los resultados obtenidos al ejecutar el procedimiento GRASP con $k_{max} = 100,000$. Las primeras filas muestran las características de las instancias: número n de objetos a empaquetar, anchura w de la banda y valor óptimo h_{opt} de la altura del empaquetado. Las dos siguientes columnas muestran los valores alcanzados y tiempos de ejecución obtenidos de [9] que se refieren a la ejecución del método *Best-fit* en un PC a 850Mhz. A continuación proporcionamos los valores alcanzados por la versión de GRASP propuesta y el tiempo en segundos necesario para alcanzar dicho valor. También se muestra la iteración en la que se alcanza y el tiempo medio en cada iteración.

Cuadro 3: Resultados comparativos con [9]

Instancia	N8	N9	N10	N11	N12
n	80	100	200	300	500
w	100	50	70	70	100
h_{opt}	80	150	150	150	300
Best-fit	84	152	152	152	306
Tiempo	0,01	0,01	0,02	0,03	0,06
GRASP	81	151	151	151	303
Tiempo	0,66	17,4	0,06	0,92	61,3
Iteración	2776	46505	14	386	8215
t_i	0,0002	0,0003	0,001	,002	0,007

6. Conclusiones

En este trabajo se muestra una implementación de la metaheurística GRASP para el problema SPP. Se propone una actualización dinámica del parámetro que regula el ajuste de los rectángulos seleccionados al segmento inferior del contorno de la solución parcial. Se ha analizado experimentalmente la política para apretar este ajuste a medida que se van insertando rectángulos. La política que da mejores resultados se interpreta como que

los primeros rectángulos se deben incluir al azar pero muy pronto hay que apretar al máximo el ajuste para permitir sólo los rectángulos que encajen perfectamente en el segmento inferior. Esta conclusión parece estar condicionada por el hecho de que las instancias utilizadas en la experiencia admiten un encaje perfecto sin dejar desperdicios y con un contorno final recto. Como investigación futura se plantea el estudio de si esta conclusión se mantiene cuando no se da el encaje perfecto de los rectángulos.

Referencias

- [1] Beltrán-Cano, J.D., Calderón, J.E., Jorge Cabrera, R., and Moreno Vega, J.M. (2001): "Procedimientos constructivos adaptativos (GRASP) para el problema del empaquetado bidimensional". Presented at: *IX Conferencia de la Asociación Española para la Inteligencia Artificial (CAEPIA 2001)*, Gijón, Spain, 14-16 November, 2001 (published in the Proceedings (Vol. II)), pp. 755-764, ISBN: 84-932297-2-5)
- [2] Beltrán-Cano, J.D., Calderón, J.E., Jorge Cabrera, R., and Moreno Vega, J.M. (2002): "Procedimientos constructivos adaptativos (GRASP) para el problema del empaquetado bidimensional". In *Inteligencia Artificial. Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial*, **15**, 26–33.
- [3] Jesús David Beltrán, Jose Eduardo Calderón, Rayco Jorge Cabrera, J. Marcos Moreno Vega *Fase de Postprocesamiento de una Búsqueda Constructiva Adaptativa (GRASP)* Actas de la VIII Conferencia Iberoamericana de Inteligencia Artificial (IBERAMIA 2002)
- [4] Jesús David Beltrán, Jose Eduardo Calderón, Rayco Jorge Cabrera, J. Marcos Moreno Vega *Reglas de Parada para el Problema del Empaquetado Rectangular Bidimensional No Guillotina* Actas de la VIII Conferencia Iberoamericana de Inteligencia Artificial (IBERAMIA 2002)

- [5] Jesús David Beltrán, Jose Eduardo Calderón, Rayco Jorge Cabrera, José A. Moreno Pérez, J. Marcos Moreno Vega *Fuzzy Stopping Rules for the Strip Packing Problem* Proceedings of the 10th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, Perugia (Italia) pp. 673–680, 2004
- [6] Jesús David Beltrán, Jose Eduardo Calderón, Rayco Jorge Cabrera, José A. Moreno Pérez, J. Marcos Moreno Vega *GRASP-VNS hybrid for the Strip Packing Problem* Proceedings of the First International Workshop in Hybrid Metaheuristics at ECCAI 2004, Valencia (España), pp. 79–90, 2004
- [7] Jesús David Beltrán, Rayco Jorge Cabrera, Ignacio José García del Amo, José A. Moreno Pérez, J. Marcos Moreno Vega *Double Fuzzy Stopping Rule for a hybrid metaheuristic for the Strip Packing Problem* Proceedings of the 5th International Conference on Recent Advances in Soft Computing, Nottingham (Inglaterra), pp. 436–441, 2004
- [8] Bortfeldt, A. (2005): "A genetic algorithm for the two-dimensional strip packing problem with rectangular pieces". To appear in *European Journal of Operational Research*.
- [9] Burke, E.K., Kendall, G., and Whitwell, G. (2004): "A New Placement Heuristic for the Orthogonal Stock-Cutting Problem". In *Operations Research* **42**(4), 655–671.
- [10] K.A. Dowsland, W.B. Dowsland, *Packing Problems* European Journal of Operational Research, 56 pp. 2–14, 1992
- [11] H. Dyckhoff, *Typology of Cutting and Packing Problems* European Journal of Operational Research 44 pp. 145–159, 1990
- [12] H. Dyckhoff, U. Finke, *Cutting and Packing in Production and Distribution* Springer Verlag, Berlin, 1992
- [13] Feo, T.A., and Resende, M.G.C. (1995): Greedy randomized adaptive search procedures". In *Journal of Global Optimization*, **6**, 109–133.
- [14] P. Festa, M.G.C. Resende *GRASP: An Annotated Bibliography* pp. 325–367. En *Essays and Surveys in Metaheuristics*. Celso C. Ribeiro, Pierre Hansen (Eds) Kluwer Academic Publishers, 2002
- [15] Hopper, E., and Turton, B.C.H. (2001). A review of the application of meta-heuristics algorithms to 2d strip packing problems. *Artificial Intelligence Review*, **16** 257–300.
- [16] Hopper, E., and Turton, B.C.H. (2001). An empirical investigation of meta-heuristics and heuristics algorithms for a 2D packing problem. *European Journal of Operational Research*, **128** (1), 34–57.
- [17] A. Lodi, S. Martello and M. Monaci. Two-dimensional bin packing problems: a survey. *European Journal of Operational Research*, 141:241–252, 2002.
- [18] A. Lodi, S. Martello and M. Monaci. Recent advances on two-dimensional bin packing problems. *Discrete Applied Mathematics*, 123:379–396, 2002.
- [19] Moreno Pérez, José A., and Moreno Vega, J. Marcos (2003). "Fuzzy Constructive Heuristics". In: Verdegay, José L. (ed.) *Fuzzy Sets Based Heuristics for Optimization*, (Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 126). Springer Verlag, 83–96.
- [20] Resende, G.C.M., González Velarde, J.L. (2003) *GRASP: Procedimientos de búsquedas miopes aleatorizados y adaptativos* Inteligencia Artificial. Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial. Numero 19, Volumen 2, páginas 61-76
- [21] Resende, M., and Ribeiro, C. (2003): Greedy Randomized Adaptive Search Procedures. In: Glover, Fred, and Kochenberger, Gary A. (eds.): *Handbook of Metaheuristics*. (International Series in Operations Research & Management Science, vol. 57). Kluwer, chap. 8.

- [22] C.L. Valenzuela, P.Y. Wang. Heuristics for large strip packing problems with guillotine patterns: an empirical study. *Proceedings of the 4th Metaheuristics International Conference*, 417–421, 2001.

Cuadro 1: Porcentaje de desviación media en los problemas N_8 a N_{12} .

λ	λ_0 0 %	λ_1 2 %	λ_2 4 %	λ_3 6 %	λ_4 8 %	λ_5 10 %	λ_6 12 %	λ_7 14 %	λ_8 16 %	λ_9 18 %
N8	01.88	02.25	02.75	02.88	03.25	03.13	03.62	04.13	04.00	04.62
N9	02.07	02.67	02.80	03.33	03.33	03.60	04.00	03.93	03.80	04.80
N10	00.73	00.73	00.87	00.93	01.00	01.20	01.20	01.47	01.67	02.07
N11	01.00	01.13	01.20	01.20	01.20	01.27	01.20	01.33	01.33	01.53
N12	01.53	01.73	01.53	01.67	01.70	01.67	01.73	01.73	01.80	02.47
media	01.44	01.70	01.83	02.00	02.10	02.17	02.35	02.52	02.52	03.10

δ	δ_0 1 + 0 %	δ_1 1 + 2 %	δ_2 1 + 4 %	δ_3 1 + 6 %	δ_4 1 + 8 %	δ_5 1 + 10 %	δ_6 1 + 12 %	δ_7 1 + 14 %	δ_8 1 + 16 %	δ_9 1 + 18 %
N8	02.63	02.50	02.63	03.00	03.37	03.00	03.50	03.50	03.88	04.38
N9	02.87	03.20	02.27	02.80	03.67	03.53	03.53	04.53	04.20	04.20
N10	00.80	01.00	00.87	00.93	01.00	01.13	01.13	01.73	01.87	01.40
N11	00.87	01.07	01.13	01.27	01.20	01.27	01.33	01.40	01.33	01.53
N12	01.67	01.60	01.57	01.63	01.70	01.80	01.63	01.70	01.97	02.30
media	01.77	01.87	01.69	01.93	02.19	02.15	02.22	02.57	02.65	02.76

Cuadro 2: Valor objetivo promedio alcanzado para N_{12} .

λ	δ	Iteraciones (k)									
		1	5	10	50	100	500	1000	2000	5000	10000
0	1	342,8	340,2	328,4	305,0	304,8	304,2	304,0	304,0	304,0	303,8
0	21	353,6	351,0	350,4	339,6	330,8	322,4	316,6	308,8	304,6	304,6
0	41	354,4	350,0	345,2	343,2	337,2	317,8	317,6	305,6	305,0	304,6
0	61	356,0	344,2	344,2	336,4	334,2	318,4	317,4	305,6	305,0	305,0
0	81	356,8	345,2	343,8	336,4	331,8	317,6	306,6	306,0	305,0	305,0
20	1	360,2	352,0	348,0	337,0	335,6	331,8	310,2	306,0	305,2	304,6
20	21	358,6	353,2	346,8	336,6	334,8	320,4	311,4	305,6	304,8	304,6
20	41	360,0	347,8	347,0	332,8	324,8	310,6	308,0	305,6	305,4	305,2
20	61	353,2	345,0	335,2	333,8	329,8	322,0	319,8	309,2	305,2	305,0
20	81	358,8	342,6	341,6	331,2	329,0	317,8	313,4	307,8	306,0	305,8
40	1	356,2	346,8	342,0	336,0	333,2	317,8	311,8	306,8	306,6	304,8
40	21	359,8	347,6	345,6	333,4	329,2	313,0	306,2	306,2	305,0	304,4
40	41	356,2	340,0	337,0	324,8	322,8	316,8	311,0	306,0	305,0	304,8
40	61	350,2	335,2	330,8	330,8	329,4	313,2	307,8	307,0	306,0	305,4
40	81	349,4	338,8	336,4	326,6	324,0	320,8	310,6	308,4	306,2	305,4
60	1	351,8	341,0	336,8	328,0	323,2	316,4	312,8	306,6	305,6	304,8
60	21	356,8	349,2	341,6	334,0	328,6	310,6	307,0	307,0	306,0	305,4
60	41	347,6	339,8	338,2	328,6	325,4	317,4	315,8	310,6	305,6	305,4
60	61	348,2	340,8	338,8	330,0	325,4	317,6	312,2	308,8	305,8	305,2
60	81	349,6	343,8	335,6	328,8	326,8	316,0	311,6	308,4	306,0	305,4
80	1	358,2	346,2	341,0	323,4	319,8	314,6	311,0	310,4	305,6	305,2
80	21	351,0	341,6	339,8	328,8	327,6	320,8	316,6	307,2	306,6	305,0
80	41	345,6	333,8	333,8	324,4	322,4	312,8	310,8	309,0	307,0	306,8
80	61	354,0	342,2	338,2	323,4	318,0	313,0	309,0	308,4	306,6	305,6
80	81	357,6	342,2	337,2	323,0	321,0	314,2	312,4	308,4	307,0	306,4